ENS CACHAN (M') MP

DURÉE : 4 heures

Dans tout le problème, $\mathbb{C}$ désigne le corps des nombres complexes, $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels, $\mathbb{Q}$ le corps des nombres rationnels et $\mathbb{Z}$ l'anneau des entiers relatifs. Par commodité un entier relatif est appelé un entier et si n est un entier tel que $n > 0$, on dit que n est un entier positif.

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. Le polynôme P est dit à coefficients entiers (respectivement à coefficients rationnels) si on a $a_k \in \mathbb{Z}$, $\forall\, k \in \{0,\ldots,n\}$ (respectivement si on a $a_k \in \mathbb{Q}$, $\forall\, k \in \{0,\ldots,n\}$). Il est dit unitaire lorsque $a_n = 1$.

Si k et n sont des entiers positifs, on note $M_{k,n}(\mathbb{R})$, et simplement $M_n(\mathbb{R})$ si $k = n$, l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels, à k lignes et à n colonnes.

Si A est dans $M_{k,n}(\mathbb{R})$, on note ${}^tA$ sa transposée, qui est dans $M_{n,k}(\mathbb{R})$.

Si p est un entier positif, on munit $\mathbb{R}^p$ du produit scalaire usuel, défini par $(X|Y) = {}^tX\,Y$ pour tous vecteurs X et Y et de la norme définie par $\|X\| = (X|X)^{1/2}$ pour tout vecteur X.

On rappelle que si A est dans $M_{k,n}(\mathbb{R})$, on définit sa norme $\|A\|$ par $\|A\| = \text{Sup}\,\{\|AX\|,\ X \in \mathbb{R}^n \text{ et } \|X\| \leq 1\}$ et que l'on a $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$ pour toute matrice A de $M_{k,n}(\mathbb{R})$ et toute matrice B de $M_{n,p}(\mathbb{R})$.

Les parties I, II et III sont indépendantes. La partie IV utilise des résultats des parties I, II et III.

PARTIE I

I.1. Soient n un entier positif, A une matrice symétrique de $M_n(\mathbb{R})$ et Sp(A) l'ensemble des valeurs propres de A. Montrer que l'on a $\|A\| = \text{Max}\,\{|\lambda|,\ \lambda \in \text{Sp}(A)\}$.

I.2. Soient n et k des entiers positifs, A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$, B une matrice de $M_k(\mathbb{R})$ et C la matrice de $M_{n+k}(\mathbb{R})$ définie par $C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

Exprimer la norme de C en fonction de celle de A et de celle de B.

I.3. Soient k et n des entiers positifs.

I.3.a. Montrer que pour toute matrice A de $M_{k,n}(\mathbb{R})$, on a

$$\|A\| = \|{}^tA\,A\|^{1/2} = \|{}^tA\|\ .$$

Tournez la page S.V.P.

ENS CACHAN (M') MP

I.3.b. Pour toute matrice A de $M_{k,n}(\mathbb{R})$, on définit la matrice B de $M_{k+n}(\mathbb{R})$ par $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ {}^tA & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que B est une matrice symétrique, calculer B^2, puis montrer que l'on a $\|B\| = \|A\|$.

I.4. Si n est un entier positif, soit $A_n = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{ij} = 1$ si $|i-j| = 1$ et $a_{ij} = 0$ sinon et soit Δ_n le polynôme défini par $\Delta_n = \det(X\,I - A_n)$, où I est la matrice unité.

I.4.a. Démontrer que la suite de polynômes $(\Delta_n)_{n\ge1}$ vérifie la relation de récurrence

$$\Delta_n = X\,\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}, \quad \forall\, n \ge 3 .$$

I.4.b. Soit θ un réel différent de 0 modulo π. Montrer que l'on a

$$\Delta_n(2\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}, \quad \forall\, n \ge 1 .$$

I.4.c. Calculer la norme de A_n.

PARTIE II

Soit n un entier positif.

II.A

II.A.1. Soient $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ des nombres complexes, P et Q les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ définis par $P = \prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i)$ et $Q = \prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i^2)$. Montrer que l'on a $Q(X^2) = (-1)^n\,P(X)\,P(-X)$.

II.A.2. Soient $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ des nombres complexes et $(P_k)_{k\ge0}$ la suite de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ définie par

$$P_k = \prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i^{2^k}), \quad \forall\, k \ge 0 .$$

Montrer que si P_0 est à coefficients entiers, alors le polynôme P_k est à coefficients entiers, pour tout entier positif k.

II.B

II.B.1. Démontrer qu'il existe un nombre fini de polynômes unitaires de degré n, à coefficients entiers et dont les racines sont de module inférieur ou égal à 1 (on cherchera une majoration des coefficients d'un tel polynôme).

ENS CACHAN (M') MII

II.B.2. Soient $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ des nombres complexes de module inférieur ou égal à 1 tels que le polynôme $P = \prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i)$ soit à coefficients entiers.

II.B.2.a. Démontrer qu'il existe deux entiers positifs distincts j et k et une permutation σ de $\{1,\ldots,n\}$ tels que

$$\alpha_i^{2^k} = \alpha_{\sigma(i)}^{2^j} \quad , \quad \forall\, i \in \{1,\ldots,n\} \ ,$$

puis qu'il existe un entier positif r tel que

$$\alpha_i^{2^{kr}} = \alpha_i^{2^{jr}} \quad , \quad \forall\, i \in \{1,\ldots,n\} \ .$$

II.B.2.b. Montrer que toute racine non nulle de P est une racine de l'unité. On rappelle qu'un nombre complexe α est une racine de l'unité s'il existe un entier positif s tel que $\alpha^s = 1$.

PARTIE III

III.A

Cette partie est préliminaire à la partie III.B.

III.A.1.

III.A.1.a. Soit p un nombre premier. Soient Q et R des polynômes à coefficients entiers non tous divisibles par p. Soit alors i (respectivement j) le plus petit entier tel que le coefficient de X^i (respectivement de X^j) dans Q (respectivement dans R) ne soit pas divisible par p. Montrer que le coefficient de X^{i+j} dans QR n'est pas divisible par p.

III.A.1.b. Soient Q et R des polynômes à coefficients entiers. Montrer que s'il existe un nombre premier p qui divise tous les coefficients de QR alors soit le polynôme $\frac{1}{p}\,Q$, soit le polynôme $\frac{1}{p}\,R$ est à coefficients entiers.

III.A.1.c. Soit P un polynôme unitaire à coefficients entiers. On suppose qu'il existe des polynômes Q et R unitaires à coefficients rationnels tels que $P = QR$. Montrer que Q et R sont à coefficients entiers.

III.A.2. Soit p un nombre premier.

III.A.2.a. Montrer que pour tous polynômes Q et R à coefficients entiers, il existe un polynôme S à coefficients entiers tel que $(Q + R)^p = Q^p + R^p + p\,S$.

Tournez la page S.V.P.

III.A.2.b. Montrer que pour tout polynôme Q à coefficients entiers, il existe un polynôme R à coefficients entiers tel que $Q^p = Q(X^p) + p\,R$ (on pourra raisonner par récurrence sur le degré de Q).

III.A.3. Soient p un nombre premier et n un entier positif premier à p. Montrer qu'il n'existe pas de polynômes P, Q et R à coefficients entiers, avec P non constant et unitaire, tels que $PQ = n + p\,R$.

III.B

Soit n un entier au moins égal à 2 et soit μ_n l'ensemble des nombres complexes α tels que $\alpha^n = 1$ et $\alpha^k \neq 1$, $\forall\, k \in \{1,\ldots,n-1\}$.

Le but de cette partie est de montrer que si un polynôme P à coefficients rationnels a pour racine un élément de μ_n alors tout autre élément de μ_n est racine de P.

III.B.1. Soit α un élément de μ_n. Montrer qu'il existe un unique couple de polynômes, noté (P_α, Q_α), ayant les propriétés suivantes :

(1) $P_\alpha(\alpha) = 0$

(2) P_α divise tout polynôme de $\mathbb{Q}[X]$ ayant pour racine α

(3) $X^n - 1 = P_\alpha\, Q_\alpha$

(4) P_α et Q_α sont des polynômes unitaires à coefficients entiers.

Nous gardons ces notations dans toute la suite de cette partie.

III.B.2. Soient α un élément de μ_n, p un nombre premier ne divisant pas n et β le nombre complexe défini par $\beta = \alpha^p$.

III.B.2.a. En utilisant la relation $X\,(n\,X^{n-1}) - n\,(X^n - 1) = n$, montrer qu'il existe des polynômes U et V à coefficients entiers tels que $U\,P_\alpha + V\,Q_\alpha = n$.

III.B.2.b. Démontrer qu'il existe des polynômes A, B et C à coefficients entiers tels que $A\,P_\alpha + B\,Q_\alpha(X^p) = n + p\,C$ (on considérera le polynôme $(U\,P_\alpha + V\,Q_\alpha)^p$).

III.B.2.c. On suppose que $P_\alpha(\beta) \neq 0$. Montrer alors que P_α divise $Q_\alpha(X^p)$. En déduire une contradiction.

III.B.2.d. Montrer que β appartient à μ_n et que l'on a $P_\beta = P_\alpha$.

III.B.3.

III.B.3.a. Soient α et β des éléments de μ_n. Montrer que $P_\alpha = P_\beta$.

ENS CACHAN (M') MP

III.B.3.b. Soit P un polynôme à coefficients rationnels tel qu'il existe un élément α de μ_n tel que $P(\alpha) = 0$. Montrer que pour tout élément β de μ_n on a $P(\beta) = 0$.

PARTIE IV

IV.A

Soient n un entier positif, P un polynôme unitaire, de degré n, à coefficients entiers et soit Q la fraction rationnelle définie par

$$Q = X^n P(X + \frac{1}{X}) .$$

IV.A.1. Montrer que Q est un polynôme unitaire, de degré 2n et à coefficients entiers.

Supposons que les racines de P sont réelles et dans l'intervalle]-2,2[.

IV.A.2.

IV.A.2.a. Montrer que les racines de Q sont de module 1.

IV.A.2.b. Montrer que toute racine de P est de la forme $2 \cos 2\pi r$, où r est un nombre rationnel positif.

IV.A.3. Soit $2 \cos \frac{2\pi p}{q}$, avec p et q entiers positifs premiers entre eux, une racine de P.

IV.A.3.a. Supposons que l'on a $q = 2k$ avec k entier. Montrer que $2 \cos \frac{\pi}{k}$ est aussi racine de P (on appliquera III.B.3.b. au polynôme Q) et que l'on a

$$| 2 \cos \frac{\pi p}{k} | \leq | 2 \cos \frac{\pi}{k} | .$$

IV.A.3.b. Supposons que l'on a $q = 2k+1$ avec k entier. Montrer que $2 \cos \frac{2k\pi}{2k+1}$ est aussi racine de P (on appliquera III.B.3.b. au polynôme Q) et que l'on a

$$| 2 \cos \frac{\pi p}{2k+1} | \leq | 2 \cos \frac{2k\pi}{2k+1} | .$$

IV.A.4. Montrer qu'il existe un entier q au moins égal à 2 tel que le maximum des valeurs absolues des racines de P soit égal à $2 \cos \frac{\pi}{q}$.

IV.B

Soient k et n des entiers positifs et A une matrice de $M_{k,n}(\mathbb{R})$, à coefficients entiers.

Montrer que l'on a soit $\|A\| \geq 2$, soit $\|A\| = 2 \cos \frac{\pi}{q}$, avec q entier au moins égal à 2.